***Exercice* 1**

La forme faible approchée s'écrit

$$T^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \; : \; \int_0^\ell \kappa(\mathrm{d}T^h/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T^h/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\ell/2} q\delta T^h \mathrm{d}x \qquad \forall \delta T^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où T^h et δT^h sont les températures approchées réelle et virtuelle et où $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont les sous-espaces respectifs de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Dans la méthode de Galerkin, les approximations T^h et δT^h sont choisies sous les formes d'ordre n suivantes

$$T^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x)$$

$$\delta T^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i h_i(x)$$

dans lesquelles les grandeurs $h_i(x)$ sont les fonctions de forme et les variables α_i et $\delta\alpha_i$ sont les inconnues discrètes réelles et virtuelles. En portant ces approximations dans la forme faible approchée, on obtient le système ci-après de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}\alpha_j \;=\; r_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

où les composantes k_{ij} de la matrice de conductibilité thermique et les éléments r_i du vecteur des sources d'énergie-chaleur s'écrivent

$$k_{ij} = \int_0^\ell \kappa(\mathrm{d}h_i/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_j/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

$$r_i = \int_0^{\ell/2} h_i q \mathrm{d}x$$

En choisissant une approximation polynomiale à un paramètre

$$T^h(x) \;=\; \alpha_1 h_1(x) \qquad\qquad h_1(x) \;=\; \frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

la matrice de conductibilité thermique et le vecteur des sources se ramènent à des scalaires

$$k_{11} = \int_0^\ell \kappa(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)^2 \mathrm{d}x \;=\; \kappa/(3\ell)$$

$$r_1 = \int_0^{\ell/2} h_1 q \mathrm{d}x \;=\; q\ell/12$$

Le coefficient α_1 et la température approchée valent alors

$$\alpha_1 \;=\; r_1/k_{11} \;=\; q\ell^2/(4\kappa)$$

$$T^h(x) \;=\; \frac{q\ell x}{4\kappa}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

Avec une approximation polynomiale à deux paramètres

$$T^h(x) \;=\; \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) \qquad h_1(x) \;=\; \frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) \qquad h_2(x) \;=\; \frac{x^2}{\ell^2}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

on trouve de manière analogue

$$k_{11} = \int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x = \kappa/(3\ell)$$

$$k_{12} = k_{21} = \int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = \kappa/(6\ell)$$

$$k_{22} = \int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x = 2\kappa/(15\ell)$$

$$r_1 = \int_0^{\ell/2} h_1 q\mathrm{d}x = q\ell/12$$

$$r_2 = \int_0^{\ell/2} h_2 q\mathrm{d}x = 5q\ell/192$$

Le système d'équations a alors pour expression

$$\frac{\kappa}{30\ell}\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{192}\begin{Bmatrix} 16 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

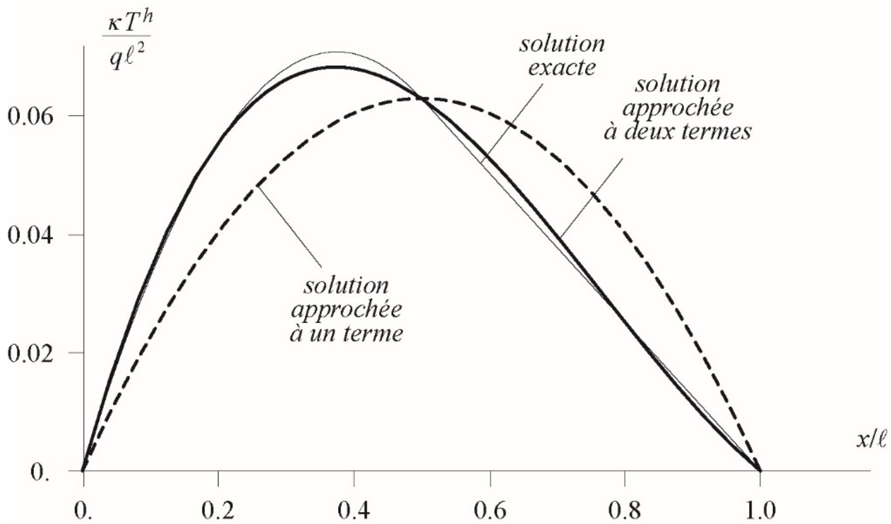
dont les solutions valent

$$\alpha_1 = 13q\ell^2/(32\kappa) \qquad \alpha_2 = -5q\ell^2/(16\kappa)$$

et la température approchée s'écrit

$$T^h(x) = \frac{q\ell x}{32\kappa}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\left(13-10\frac{x}{\ell}\right)$$

Les graphes de la solution exacte (non calculée ici) et des deux approximations sont donnés à la figure ci-dessous.



***Exercice* 2**

La forme intégrale du problème a pour expression

$$\int_0^{\ell} [EI(\mathrm{d}^4u/\mathrm{d}x^4) + N(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)]\delta u \mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall \delta u$$

dans laquelle δu dénote le déplacement transversal virtuel.
Une première intégration par parties donne

$$\int_0^{\ell} \{-[EI(\mathrm{d}^3u/\mathrm{d}x^3) + N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]\}(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + \{[EI(\mathrm{d}^3u/\mathrm{d}x^3) + N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]\delta u\}\Big|_0^{\ell} \;=\; 0 \quad \forall \delta u$$

Compte tenu des deux conditions de bord essentielles dont les contreparties virtuelles sont cinématiquement admissibles

$$\delta u(0) \;=\; \delta u(\ell) \;=\; 0$$

la forme intégrale devient

$$\int_0^{\ell} [EI(\mathrm{d}^3u/\mathrm{d}x^3) + N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)](\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall \delta u$$

Par une seconde intégration par parties appliquée uniquement au terme en dérivée tierce, on a

$$\int_0^{\ell} [-EI(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)(\mathrm{d}^2\delta u/\mathrm{d}x^2) + N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)]\mathrm{d}x + [EI(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)]\Big|_0^{\ell} \;=\; 0 \qquad \forall \delta u$$

En vertu des deux conditions aux limites naturelles, cette expression se simplifie en

$$\int_0^{\ell} [EI(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)(\mathrm{d}^2\delta u/\mathrm{d}x^2) - N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)]\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall \delta u$$

La formulation faible du problème revient ainsi à rechercher

$$u \in \mathcal{U} \;:\; \int_0^{\ell} [EI(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)(\mathrm{d}^2\delta u/\mathrm{d}x^2) - N(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)]\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall \delta u \;\in\; \mathcal{V}$$

où les classes de fonctions $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ s'écrivent

$$\mathcal{U} \;=\; \{u(x) \,|\, u(x) \in H^2(]0,\ell[);\, u(0) = u(\ell) = 0\}$$

$$\mathcal{V} \;=\; \{\delta u(x) \,|\, \delta u(x) \in H^2(]0,\ell[);\, \delta u(0) = \delta u(\ell) = 0\}$$

Pour la méthode de Galerkin, l'approximation polynomiale de plus faible degré est de type

$$u(x) \;\approx\; u^h(x) \;=\; \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

où α, β et γ sont des coefficients. Comme, conformément à la classe de fonctions $\mathcal{U}$, le déplacement approché u^h doit satisfaire les conditions aux limites essentielles, l'approximation prend l'allure suivante

$$u^h \;=\; \gamma x(x-\ell) \;=\; \alpha_1 h_1$$

dans laquelle $h_1 = x(x-\ell)$ est la fonction de forme et α_1 le coefficient associé. Les dérivées de l'unique fonction de forme valent

$$\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x \;=\; 2x - \ell \qquad \mathrm{d}^2h_1/\mathrm{d}x^2 \;=\; 2$$

En portant ces égalités dans la forme faible approchée

$$u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \ : \ \int_0^\ell [EI(\mathrm{d}^2u^h/\mathrm{d}x^2)(\mathrm{d}^2\delta u^h/\mathrm{d}x^2) - N(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x)]\mathrm{d}x = 0$$

$$\forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où $\delta u^h = \delta\alpha_1 \, h_1$ est le déplacement transversal virtuel approché, on obtient

$$\int_0^\ell [EI(\mathrm{d}^2h_1/\mathrm{d}x^2)^2 - N(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)^2]\mathrm{d}x = \int_0^\ell [EI(2)^2 - N(2x-\ell)^2]\mathrm{d}x = 0$$

La résolution de l'intégrale conduit à la charge critique suivante

$$N = 12EI/\ell^2 = \pi^2 EI/(0{,}907\ell)^2$$

soit une erreur de –9,3% sur la demi-longueur d'onde.